

©Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Тисленко О.Б.

## **ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОГО ПОЛЯ НАПРУЖЕНЬ У КАНАТАХ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МЕХАНІЗМІВ**

### **1. Постановка проблеми**

Дослідження динамічного поля напружень у канатах вантажопідйомних механізмів та пристроїв, таких як ліфти та шахтні підйомники, є важливою для практичних застосувань задачею. Тому, вивченню проблеми обчислення динамічних напружень, які виникають у канатах вказаних вище механізмів та пристроїв, присвячена велика кількість робіт. Виявилось, що без врахування зміни довжини канату по суті не вдається отримати модель системи, яка складається з канату і барабану, яка достатньо адекватна натурній. Необхідно врахувати також, що канат на барабані й поза ним навантажується по-різному. Це зв'язано з тим, що поза барабаном канат вільно провисає, у той час як на барабані виникають сили тертя між канатом та барабаном.

Якщо коефіцієнт тертя канату з барабаном досить великий, відбувається прилипання канату до барабану.

Якщо коефіцієнт тертя канату з барабаном не дуже великий, відбувається проковзування канату вповдовж барабану. При цьому умови навантаження канату на барабані виявляються різними у випадку в'язкого чи сухого тертя.

### **2. Аналіз останніх публікацій по темі дослідження**

Задача про відшукання пружних напружень у канатах змінної довжини для великих значень коефіцієнту тертя була розв'язана у роботах [1-5]. У припущенні, що проковзування канату по барабану не відбувається, задача для цього випадку була зведена до розв'язку хвильового рівняння у області зі змінними границями. Завдяки розробленому методу побудови хвиль, які

відбиваються від рухомої границі, було отримане точне рішення такої задачі, яке представляє собою сукупність хвиль, що розповсюджуються у канаті.

На основі підходів, розвинутих у роботі [6], автору [7, 8] вдалося вивести рівняння пружних переміщень у підйомних канатах, котрі намотуються на барабан, із врахуванням сил тертя. При цьому гранична задача представляє собою таку, що має змінну структуру, а границя між різними структурами є рухомою. Отриманий розв'язок такої задачі у квадратурах у вигляді хвиль, які розповсюджуються у канаті. На границі розділу виникають як відбиті, так й заломлені хвилі. Твердження про те, що така задача може бути розв'язана у квадратурах, засноване на тому, що зараз вже розв'язані крайові (граничні) задачі для областей з рухомими границями, як для хвильового рівняння [1-5], так і для телеграфного рівняння [7, 8].

### **3. Мета роботи**

Метою роботи є отримання нових (неперіодичних) розв'язків рівнянь стану канату, як на барабані, так і поза барабаном, наведених у [8], методом [9, 10].

### **4. Виклад основного змісту дослідження**

#### **1. Рівняння стану канату.**

Канат розглядається як гнучка нитка, тобто напруження вигину у канаті набагато менші за напруження розтягу (тому першими можна знехтувати). Канат намотується на барабан радіусу  $r$ . Внаслідок того, що напруження вигину не враховуються, канат можна вважати прямолінійним. Один кінець канату закріплений на барабані. Початок вісі  $X$  розміщуємо у точці закріплення канату на барабані й вісь  $X$  спрямовуємо вдовж поздовжньої осі канату, у бік вантажу, який піднімається канатом. Додатній напрямок пружних переміщень у канаті, що позначаються через  $u(x,t)$ , будемо вважати співпадаючим з додатнім напрямком вісі  $X$ .

#### **1.1. В'язке тертя.**

Пружні переміщення у канаті, розміщеному на барабані, у випадку в'язкого тертя описуються наступним телеграфним рівнянням [8]:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\mu}{ES} \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

де  $a^2 = \frac{E}{\rho}$ ,  $E$  – модуль пружності (Юнга) матеріалу канату;

$\rho$  – його щільність;

$\mu$  – коефіцієнт в'язкого тертя для канату в цілому,

$S$  – площа поперечного перерізу канату.

## 1.2. Сухе тертя.

У цьому випадку необхідно враховувати тиск канату на барабан, котрий виникає внаслідок наявності зусилля, що розтягує канат  $P(x,t)$ . Такий лінійний тиск, тобто тиск на одиницю довжини канату, позначимо  $p(x,t)$ . У свою чергу, наявність тиску канату на барабан викликає появу сили тертя канату з барабаном при спробі проковзування канату по барабану. Напрямок сили тертя буде протилежним напрямку проковзування канату по барабану. Це проковзування обумовлене пружними переміщеннями у канаті.

Тоді лінійна, тобто віднесена до одиниці довжини канату, сила тертя  $f(x,t)$  буде визначатись виразом [6]:

$$f(x,t) = -\beta \cdot p(x,t) \cdot \operatorname{sign}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right), \quad (2)$$

де  $\beta$  – коефіцієнт тертя канату з барабаном.

У роботі [8] показано, що:

$$p(x,t) = \frac{E \cdot S}{r} \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}. \quad (3)$$

Тоді формула (2) набуває вигляду:

$$f(x,t) = -\frac{\beta \cdot E \cdot S}{r} \cdot \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) \cdot \operatorname{sign}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right). \quad (4)$$

Рівняння, яке описує пружні переміщення у канаті, що намотується на барабан у випадку сухого тертя, має наступний вид [8]:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\beta}{r} \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \cdot \operatorname{sign}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right) = 0. \quad (5)$$

По суті, рівняння (5) представляє собою нелінійне телеграфне рівняння.

### 1.3. Залежність коефіцієнту в'язкості від тиску.

Коефіцієнт в'язкого тертя канату з барабаном, взагалі кажучи, залежить від величини тиску канату на барабан, тобто  $\mu = \mu(\varphi(x, t))$ . У цьому випадку рівняння (1) із врахуванням рівності (3) приймає наступний вигляд [8]:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\mu \left( \frac{ES}{r} \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)}{ES} \cdot \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right) = 0. \quad (6)$$

Слід зазначити, що для будь-якої функції  $\mu = \mu(\varphi(x, t))$  телеграфне рівняння (6) буде залишатись нелінійним.

### 1.4. Відсутність тертя.

При розгляді елемента канату, що розміщений поза барабаном, можна отримати рівняння для пружних переміщень канату поза барабаном виду [8] стандартного хвильового (лінійного) рівняння у частинних похідних:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

### 1.5. Постановка задачі для канату в цілому

Таким чином, задача для канату в цілому виглядає наступним чином [8]. Рівняння пружних переміщень у частині канату, яка розміщена на барабані, буде представлена одним з телеграфних рівнянь (1) чи (5) або (6). Рівняння пружних переміщень у частині канату, яка звисає з барабану, буде представлене хвильовим рівнянням (7). Тобто, пружні переміщення канату у двох різних його частинах описуються різними диференціальними рівняннями. У якості роздільника цих двох частин канату виступає точка початкового контакт канату з барабаном. Позначимо координату цієї точки через  $X_k$ . Якщо вісь  $X$  буде рухатись разом із канатом, тоді точка  $X_k$  буде залишатись нерухомою. Задля зручності постановки граничних (крайових) задач розділимо рух канату на переносний та відносний рухи. Під переносним рухом канату будемо розуміти рух канату як абсолютно твердого тіла зі швидкістю  $V(t)$ , де  $V(t)$  – лінійна швидкість центральної вісі

канату на барабані. Тоді у відносному русі всі точки канату будуть здійснювати тільки пружні переміщення. Тобто, у ейлеровій системі координат всі точки канату будуть мати постійні координати. І тільки точка  $X_k$  буде рухатись зі швидкістю  $V(t)$ . Інакше кажучи, буде виконуватись рівність:

$$X_k = V(t) \cdot t, \quad \dot{X}_k = V(t), \quad (8)$$

де  $\left( \dot{\phantom{x}} \right) \equiv \frac{d}{dt} \left( \phantom{x} \right)$ .

Таким чином, у такій постановці області, у яких справедливе чи телеграфне, чи хвильове рівняння, будуть мати змінні границі, й границя між цими областями буде визначатись рівністю (8). На даній границі повинні залишатись неперервними або пружні переміщення, або напруження. Умова неперервності пружних переміщень на границі розділу буде мати наступний вид [8]:

$$u(X_k + 0, t) = u(X_k - 0, t). \quad (9)$$

Умова неперервності пружних напружень на границі розділу буде виглядати наступним чином [8]:

$$\frac{\partial u(X_k + 0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(X_k - 0, t)}{\partial x}. \quad (10)$$

Таким чином, задача про пружні переміщення у канаті, який намотується на барабан, зведена до крайової задачі зі зміною структурою, причому границя між різними структурами є рухливою. Розв'язок такої задачі може бути отриманий у квадратурах у вигляді хвиль, що розповсюджуються. При цьому на границі розділу будуть виникати як відбиті, так і заломлені хвилі. Зараз вже розв'язані крайові задачі для областей з рухливими границями, як для хвильового рівняння [1-5], так й для телеграфного (лінійного) рівняння [7]. Нижче отримані неперіодичні хвильові розв'язки лінійного/нелінійного телеграфних рівнянь методами, розвиненими у роботах [9, 10].

## 2. Точні розв'язки телеграфного рівняння для неперіодичних полів.

Рівняння (1) представляє собою найпростіший приклад телеграфного рівняння, яке широко використовується для опису хвильових процесів у дисипативних середовищах.

Вводячи характерний час встановлення поля деформацій  $T$ ,

$$T = \frac{2ES}{a^2 \cdot \mu}, \quad (11)$$

можна представити традиційний розв'язок (1), який описує затухаючі синусоїдальні хвилі, які характеризуються комплексним хвильовим числом  $K$ :

$$K = \frac{w}{V} \cdot \sqrt{1 + 2i(wT)^{-1}}; V \equiv a. \quad (12)$$

Поряд з розв'язком (12) та розв'язком, що може бути поданий у виді інтегралів за траєкторіями [10], рівняння (1) описує й несинусоїдальні поля у часовій області. Користуючись нормованими змінними:

$$u = A = A_0 \cdot f, \tau = t \cdot T^{-1}, \eta = X / (V \cdot T), \quad (13)$$

можна переписати (1) у безрозмірному виді:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} = 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial \tau}. \quad (14)$$

Точні аналітичні розв'язки безрозмірного телеграфного рівняння (14), які описують переміщення змінного неперіодичного поля деформації, представляються у формі [9, 10]:

$$f = \sum_q a_q \cdot \bar{f}_q, \quad (15)$$

$$\bar{f}_q = \frac{1}{2} \cdot \left( \Theta_{q-1} + \Theta_{q+1} - 2\Theta_q \right) \cdot \frac{\partial \Theta_q}{\partial \tau}, \quad (16)$$

$$\Theta_q = \exp(-\tau) \cdot \left( \frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^{q/2} \cdot I_q \left( \sqrt{\tau^2 - q^2} \right) \gg \eta. \quad (17)$$

Тут  $I_q$  – модифікована функція Бесселя; індекс  $q$  визначається (як і постійні коефіцієнти  $a_q$ ) з граничних умов. Часові та просторові похідні від  $U$  обчислюються за формулою (16) та :

$$\frac{\partial \Theta_q}{\partial \eta} = -\frac{1}{2} \cdot \left( \Theta_{q-1} - \Theta_{q+1} \right). \quad (18)$$

Характерні властивості нероздільних функцій  $\theta_q$ , що описують поле деформацій у канаті, зводяться до наступних

$$\Theta_q(\tau, \eta) \Big|_{\tau = \eta} = 0, q > 0.$$

$$1. \quad \Theta_q(\tau, \eta) \Big|_{\tau = \eta} = 0, q > 0. \quad (19)$$

2. Користуючись відомою асимптотикою функцій  $I_q(u)$

$$I_q(u) \Big|_{u \gg 1} = \frac{\exp(-u)}{\sqrt{2\pi u}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \tilde{A}(q+1/2+n)}{(2\pi)^n \cdot \tilde{A}(q+1/2-n)}, \quad (20)$$

де  $\Gamma$  – гама-функція, можна знайти закон спадання поля  $\bar{f}_q$  (16) у будь-якому перерізі при  $\tau \gg \eta$ :

$$\bar{f}_q \Big|_{\tau \gg \eta} = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \tau^{-3}. \quad (21)$$

Суттєвим є й те, що нестационарні поля деформацій у канаті характеризуються природним масштабом часу  $T$  (11).

За наявності сил сухого тертя рівняння (5) можна подати у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mp \frac{\beta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (22)$$

де верхній знак відповідає ситуації  $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$ , а нижній знак останнього члена (22) –

при якій  $\frac{\partial u}{\partial t} < 0$ .

Вводячи знову заміну змінних у (22) типу (13), отримаємо:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \pm \frac{\beta \cdot a \Gamma}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0. \quad (23)$$

Якщо ввести характерний час встановлення поля деформацій у канаті  $T$  за формулою:

$$T = \frac{2r}{\beta \cdot a}. \quad (24)$$

тоді матимемо замість (23) наступне рівняння:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \pm 2 \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0. \quad (25)$$

Кожне з рівнянь (25) має розв'язки, схожі на (15)-(17), але:

а) при  $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$  маємо:

$$\begin{cases} f^* = \sum_q a_q^* \cdot \bar{f}_q^*; \bar{f}_q^* = \frac{1}{2} \cdot \left( \Theta_{q-1}^* + \Theta_{q+1}^* - 2\Theta_q^* \right) \approx \frac{\partial \Theta_q^*}{\partial \tau}; \\ \Theta_q^* = \exp(\eta) \cdot \left( \frac{\eta + \tau}{\eta - \tau} \right)^{q/2} \cdot I_q \left( \sqrt{\eta^2 - \tau^2} \right); \end{cases} \quad (26)$$

б) при  $\frac{\partial u}{\partial t} < 0$  маємо:

$$\begin{cases} f^{**} = \sum_q a_q^{**} \cdot \bar{f}_q^{**}; \bar{f}_q^{**} = \frac{1}{2} \cdot \left( \Theta_{q-1}^{**} + \Theta_{q+1}^{**} - 2\Theta_q^{**} \right) \approx \frac{\partial \Theta_q^{**}}{\partial \tau}; \\ \Theta_q^{**} = \exp(-\eta) \cdot \left( \frac{\eta - \tau}{\eta + \tau} \right)^{q/2} \cdot I_q \left( \sqrt{\eta^2 - \tau^2} \right); \end{cases} \quad (27)$$

Величини  $\frac{\partial u}{\partial t}$  та  $\frac{\partial u}{\partial x}$  знаходяться за допомогою формул типу (16), (18):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = + \frac{A_0}{VT} \cdot \sum_q a_q \cdot e_q, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = + \frac{A_0}{VT} \cdot \sum_q a_q \cdot h_q. \quad (28)$$

Гармоніки  $e_q$  та  $h_q$  у (28) мають вид:

$$e_q = \frac{1}{4} \cdot \left( \Theta_{q-2} - 4 \cdot \Theta_{q-1} + 6 \cdot \Theta_q - 4 \cdot \Theta_{q+1} + \Theta_{q+2} \right), \quad (29)$$

$$h_q = \frac{1}{4} \cdot \left( \Theta_{q-2} - 2 \cdot \Theta_{q-1} + 2 \cdot \Theta_{q+1} - \Theta_{q+2} \right). \quad (30)$$

Приклади просторово-часової еволюції гармонік  $e_q$  та  $h_q$  показані на рис. 1.

Цікаво зазначити деякі особливості полів, які формуються гармоніками (29), (30):

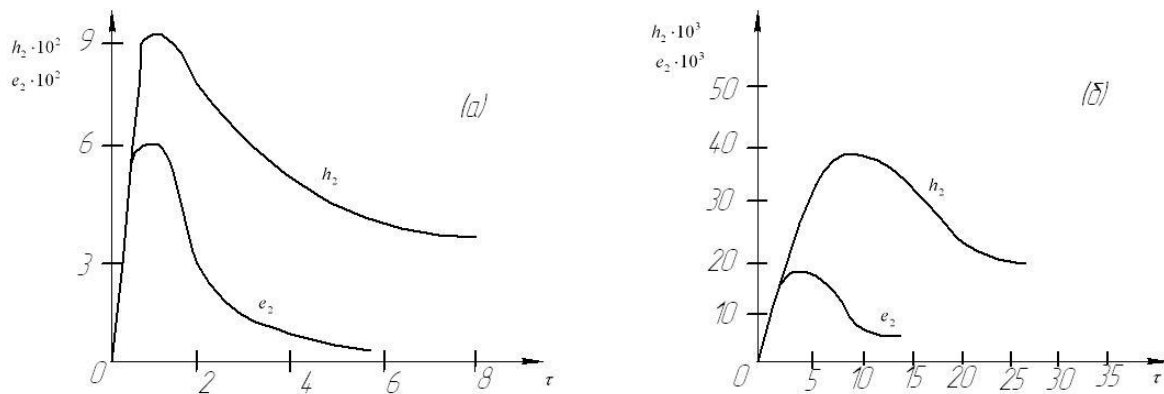
а) на відміну від процесу затухання гармонічних хвиль, що характеризується єдиним значенням декременту затухання часової та просторової похідних від поля переміщення  $u(x,t)$ , темпи спадання максимумів гармонік  $e_q$  та  $h_q$  різні. Як видно з рис.1., відношення піків огинаючих гармонік  $e_2$  при  $\eta = 2$  й  $\eta = 0$  складає  $\gamma_e = 0,2$ ; аналітичне співвідношення для гармоніки  $h_2$  складає  $\gamma_m = 0,3$ . Зазначимо, що відношення піків огинаючих у



точках  $\eta = 2$  й  $\eta = 0$  для синусоїдальних хвиль з частотою  $\omega$  складає у випадку  $(\omega T)^2 \gg 4, \gamma_s = 0,136$  (12), тому  $\gamma_m > \gamma_e > \gamma_s$ ; таким чином, неперіодичні гармоніки можуть затухати повільніше, ніж синусоїдальні хвилі;

б) розповсюдження гармонік полів супроводжується швидким розпливанням огинаючих;

в) темпи розпливання просторової та часової похідних від  $u(x,t)$  негармонічного поля у канаті різні.



**Рис. 1** – Несинусоїдальні гармоніки  $\frac{\partial u}{\partial t}(e_2)$  та  $\frac{\partial u}{\partial x}(h_2)$  складових

нестационарного поля  $u(x,t)$  канату у точках  $\eta = 0$  (а) й  $\eta = 2$  (б);  $\tau = t \cdot T^{-1}$

## Висновки

1. Проведений динамічний аналіз полів напружень, деформацій, швидкостей переміщень та самих переміщень у канатах вантажопідйомних механізмів та пристроїв у межах запропонованої моделі, яка враховує сили в'язкого/сухого тертя, й спирається на точні розв'язки телеграфного рівняння для неперіодичних полів.

2. Отримані у роботі результати можуть у подальшому слугувати для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку динамічних характеристик канатів вантажопідйомних кранів на стадії їх проектування та в умовах реальної експлуатації.

### **Список використаних джерел:**

1. Остапенко В. А. Динамика волн в канатах переменной длины / В. А. Остапенко // Сборник научных работ Полтавского национального технического университета. – Полтава, 2005. – Вып. 6. – С. 216–220.
2. Ostapenko V. A. Dynamic field of displacements in rods of variable length / V.A. Ostapenko // Proceedings of 8<sup>th</sup> International Conference on Dynamical Systems Theory and Applications. – Lodz, Poland, 2005. – P. 316–323.
3. Остапенко В. А. Краевая задача для стержня переменной длины, возмущаемого с подвижного верхнего конца / В. А. Остапенко // Вестник Днепропетровского университета. Сер.: Механика. – 2006. – № 2/1. – С. 182–198.
4. Ostapenko V. A. Dynamic field of displacement in ropes of variable length at perturbation of nonzero initial conditions / V. A. Ostapenko, N. V. Polykov // Proceedings of 9<sup>th</sup> International Conference on Dynamical Systems Theory and Applications. – Lodz, Poland, 2007. – P. 347–354.
5. Ostapenko V. A. Exact solution of the problem for dynamic field of displacements in rods of variable length / V. A. Ostapenko // Archives of Applied Mechanics. – Hamburg : Springer-Verlag, 2007. – Vol. 77. – P. 313–324.
6. Горошко О. А. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины / О. А. Горошко, Г. Н. Савин. – К.: Наукова думка, 1971. – 224 с.
7. Остапенко В. А. Первая краевая задача для телеграфного уравнения в ограниченной области / В. А. Остапенко // Вестник Днепропетровского университета. – 2009. – Т. 17, № 8. – Сер. Моделирование. – Вып. 1. – С. 149–161.
8. Остапенко В.А. Уравнения упругих перемещений в подъемных канатах, наматываемых на барабан, с учетом сил трения / В. А. Остапенко // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон, 2011. – Вып. 3 (42). – С. 333–337.
9. Данилов В. А. Негармонические электромагнитные импульсы в проводящей среде / В. А. Данилов, А. Б. Шварцбург // Доклады Академии наук (Россия). – 1995. – Т. 341, № 3. – С. 330–333.

10. Шварцбург А. Б. Видеоимпульсы и непериодические волны в диспергирующих средах (точно решаемые модели) / А. Б. Шварцбург // Успехи физических наук. – 1998. – Т. 168, № 1. – С. 85–103.

**Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Тисленко О.Б.** «Дослідження динамічного поля напружень у канатах вантажопідйомних механізмів».

Проведений всебічний аналіз динамічного поля напружень у канатах вантажопідйомних механізмів, які намотуються на барабан, з урахуванням сил тертя. У межах моделей в'язкого та сухого тертя отримані нові неперіодичні розв'язки відповідних хвильових (телеграфних) рівнянь, що моделюють процеси розповсюдження збурень у канатах.

**Ключові слова:** динамічне поле, напруження, канати, вантажопідйомні механізми.

**Ловейкин В.С., Човнюк Ю.В., Тисленко А.Б.** «Исследование динамического поля напряжений в канатах грузоподъемных механизмов».

Проведен всесторонний анализ динамического поля напряжений в канатах грузоподъемных механизмов, которые наматываются на барабан, с учетом сил трения. В пределах моделей вязкого и сухого трения получены новые непериодические решения соответствующих волновых (телеграфных) уравнений, которые моделируют процессы распространения возмущений в канатах.

**Ключевые слова:** динамическое поле, напряжения, канаты, грузоподъемные механизмы.

**Loveykin V.S., Chovnyuk Y.V., Tislenko O.B.** “The research of the dynamic stress field in the ropes lifting mechanisms”

A comprehensive analysis of the dynamic stress field in the ropes lifting mechanisms is proposed. These ropes are wounded on a drum and subjected to friction forces. New aperiodic solutions of the corresponding wave (telegraph)

equations are derived. These solutions model the processes of widespread disturbances in the ropes with viscous/dry friction.

***Key words:*** dynamic field of tension, cables, hoisting machines.

Стаття надійшла до редакції 27 жовтня 2011 р.