УДК 621.01

© **Драгун С.В.**

ОБ УПРОЩЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

При исследовании динамических процессов в механических системах весьма существенную роль играет построение математической модели оптимальной размерности, которая должна адекватно отражать необходимые динамические свойства исследуемой системы и быть по возможности простой. Наиболее распространенный подход к построению таких моделей заключается в учете максимального числа степеней свободы системы с последующим упрощением полученной модели и обеспечением динамической эквивалентности сложной исходной и упрощенной модели. Критерии эквивалентности могут быть различны и выбираются в зависимости от целей исследования. Одним из широко используемых критериев динамической эквивалентности является сохранение части спектра собственных частот исходной системы.

Существуют различные методы построения упрощенных моделей механических систем / 1 – 3 /. При исследовании свободных и вынужденных крутильных колебаний в силовых передачах транспортных машин наиболее целесообразным является применение методов, основанных на исследовании свойств линейных парциальных систем / 1 , 4 /. Эти методы достаточно просты, они позволяют сохранить основную структуру исходной модели и имеют ясный физический смысл. Рассмотрим получение этих методов исключения высоких частот с единых позиций.

Пусть система дифференциальных уравнений движения записана в виде

$$I \cdot \ddot{\vec{\varphi}} + K \cdot \vec{\varphi} = 0 \qquad (1)$$

Здесь $\vec{\varphi}$ – n - мерный вектор обобщенных координат, в качестве которых используются углы поворота инерционных элементов; I – диагональная, K – симметрическая матрица размерности $n \times n$. Методы упрощения математических моделей с выделением парциальных систем основаны на использовании условия

$$\omega_i^2 = {k_{i,i}}\Big/{I_{i,i}} \rangle\rangle \lambda_{max}^2 \qquad (2)$$

где ω_i парциальная частота i - й парциальной системы; $k_{i,i}$ и $I_{i,i}$ – соответствующие элементы матриц жесткости и инерции; λ_{max} - верхняя граница выделяемого участка спектра собственных частот.

Пусть условие (2) выполняется для $i = n$. Преобразуем систему (1), выделив компонент φ_n вектора $\vec{\varphi}$. Его первые $n-1$ компоненты образуют вектор $\vec{\varphi}_1$. Получим

$$I_1 \ddot{\vec{\varphi}}_1 + K_1 \vec{\varphi}_1 + K_2 \varphi_n = 0;$$

$$I_{n,n} \ddot{\varphi}_n + K_3 \vec{\varphi}_1 + k_{n,n} \varphi_n = 0.$$

Здесь K_2 – матрица-столбец размерности $(n-1) \times 1$, K_3 – матрица-строка размерности $1 \times (n-1)$, K_1 – симметрическая матрица размерности $(n-1) \times (n-1)$, $k_{n,n}$ – соответствующий элемент матрицы K. Уравнение частот этой системы имеет вид

$$Det(K_1 - I_1 \lambda^2 - K_2 K_3 Z) = 0; \quad Z = (k_{n,n} - I_{n,n} \lambda^2)^{-1}.$$

Различное преобразование Z приводит к различным методам упрощения. На основании формальных математических соотношений и использовании условия (2)

$$Z = k_{n,n}^{-1} (1 - \frac{\lambda^2}{\omega_n^2})^{-1} = k_{n,n}^{-1} (1 - \frac{\lambda_{max}^2}{\omega_n^2} \lambda_0^2)^{-1} = k_{n,n}^{-1} (1 - \varepsilon \cdot \lambda_0^2)^{-1} \approx$$

$$\approx k_{n,n}^{-1} (1 + \varepsilon \cdot \lambda_0^2) = k_{n,n}^{-1} + k_{n,n}^{-2} I_{n,n} \lambda^2 .$$

Здесь $\lambda_0 = \lambda / \lambda_{max}$ – безразмерная частота системы, ε – малый параметр. После подстановки этого результата в уравнение частот получаем метод упрощения, изложенный в работе / 1 /

$$K^{*} = K_1 - K_2 K_3 k_{n,n}^{-1}, \qquad I^{*} = I_1 + diag(\, K_2 K_3 k_{n,n}^{-2} I_{n,n}\,). \qquad (3)$$

На основании физических соображений, аналогичных изложенным в / 3 /, имеет место преобразование

$$K_2 K_3 Z \approx K_2 K_3 k_{n,n} - E \cdot K_2 k_{n,n}^{-1} I_{n,n}.$$

Этому преобразованию соответствует метод упрощения

$$K^{*} = K_1 - K_2 K_3 k_{n,n}^{-1}, \qquad I^{*} = I_1 - E \cdot K_2 k_{n,n}^{-1} I_{n,n}. \qquad \mathbf{(4)}$$

Полученные формулы (4) являются обобщением метода из / 3 / на случай дискретных разветвленных систем.

Из выражений (3) и (4) следует, что методы упрощения такого типа одинаково преобразуют структуру системы и значения упругих элементов. Преобразование значений инерционных элементов происходит по-разному. Их значения, полученные по методу (4), всегда выше значений, полученных по методу (3). Физический смысл этих методов упрощения заключается в распределении значения инерционного элемента, порождающего высокую собственную частоту, между ближайшими инерционными элементами и в последовательном соединении соответствующих упругих участков.

Из отмеченных выше особенностей методов упрощения следует, что можно построить и другие схемы упрощения, которые будут давать хорошие результаты. Например, можно усреднять распределение $I_{n,n}$ при различных методах

$$K^{*} = K_1 - K_2 K_3 k_{n,n}^{-1},$$

$$I^{*} = I_1 + \frac{1}{2} diag(\, k_{n,n}^{-1}(\, K_2 K_3 k_{n,n}^{-1} - E \cdot K_2\,) I_{n,n}\,). \qquad (5)$$

Здесь, а также в формулах (3), сохраняются только диагональные элементы соответствующих матриц, в результате этого сохраняется структура исходной модели. Если силовая передача содержит дифференциальный редуктор, то матрица инерции будет недиагональной. Вследствие этого при преобразовании матрицы инерции следует удерживать соответствующие недиагональные элементы.

Список использованных источников

1. Банах Л. Я. Уменьшение числа степеней свободы при исследовании многомерных систем / Л. Я. Банах // Машиноведение. – 1979. – № 1. – С. 21–26.
2. Терских В.П. Крутильные колебания валопровода силовых установок : В 5-ти т. Т. 1 / В. П. Терских. – Л. : Судостроение, 1970. – 216 с.
3. Ривин Е. И. Динамика привода станков / Е. И. Ривин. – М. : Машиностроение, 1966. – 204 с.

Драгун С. В. "Об упрощении математических моделей механических систем"

В работе рассматривается алгоритм построения математических моделей крутильных колебаний механических систем минимальной размерности, которые в заданном частотном диапазоне адекватно отражают свойства исходной полной модели. Анализируется физическая сторона процесса построения упрощенных моделей.

Драгун С. В. "Про спрощення математичних моделей механічних систем"

В роботі розглядається алгоритм побудови математичних моделей крутильних коливань механічних систем мінімальної розмірності, які в заданому частотному діапазоні адекватно відбивають властивості початкової повної моделі. Аналізується фізична сторона процесу побудови спрощених моделей.

Dragun S. V. "About simplification of mathematical models of the

mechanical systems”

The algorithm of construction of mathematical models of turning vibrations of the mechanical systems of minimum dimension, which in the set frequency range adequately reflect properties of initial complete model, is examined in work. The physical side of process of construction of the simplified models is analysed.