

## **ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В КАНАТАХ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕЙ**

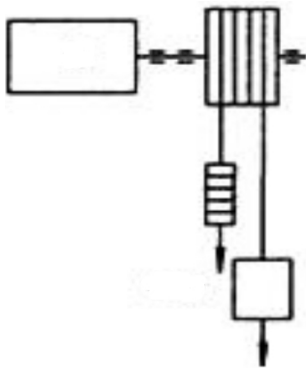
### **1. Анализ публикаций по теме исследования**

Вопрос об определении усилий в подъемных канатах, о постановке методов решения тесно связан с задачей о продольных колебаниях упругих стержней и стальных канатов. В работах [1, 2] ограничились шахтными канатами постоянной длины и постоянного сечения. В статье [1] рассматриваются различные специальные условия: сообщение начальной скорости только подвешенному к канату грузу, внезапная нагрузка нижнего конца каната, внезапная остановка верхнего конца каната, и, наконец, равнопеременное движение верхнего конца каната. Заметим, что в первых трех случаях вдоль каната будет распространяться сильный разрыв непрерывности. Рассматриваются канаты постоянного сечения, но переменной длины, учитывая массу и вес каната при больших высотах подъема. Металлической канат как гибкий элемент, способный нести высшую растягивающую нагрузку, обширно применяется в современной подъемно-транспортной технике. Работа каната и связанных с ним устройств почти во всем находится в зависимости от корректности его конструктивного использования сообразно с критериями эксплуатации и точности расчета на упругость и крепкость. В силовом расчете каната вырисовываются две органически связанные, но очень разнящиеся по собственной постановке и способам исследовательских работ задачи. Появляется ряд вопросов, связанных с определением общих усилий в канате как едином агрегате под действием наружных воздействий статического либо динамического усилий. Наружная форма железного каната дает подсказку в данном случае идею его расчета как гибкой нити. Потому такие задачки решаются интерпретацией каната некой эквивалентной по наружным свойствам нитью и в общем могут быть рассчитаны с помощью динамики движения продольных колебаний, так как крутильные колебания будут незначительными для шахтных подъемных систем.

### **2. Постановка проблемы**

Данная статья посвящена исследованию динамического поля перемещений и напряжений в стальных канатах переменной длины шахтных подъемных механизмах; канаты являются уравнивающими, и главный канат переносит сосредоточенное напряжение, которое до начала движения системы находилось на нижнем конце главного каната [3]. Но задачи наружной механики каната еще не определяют фактического его напряженного состояния. Для этого нужно иметь сведения о рассредоточении общих усилий между отдельными элементами в канате. Решение этого вопроса просит исследования силового взаимодействия отдельных частей в канате и построения таким образом математической

модели перемещения волновых процессов в каждый момент времени как аналитическую функцию, а не дискретной разницей.



**Рис. 1** – Кинематическая схема

В настоящее время на шахтах и рудниках эксплуатируется большое число подъемных установок, кинематические схемы которых могут быть представлены в следующем виде (рис. 1): кинематическая схема подъемной установки со шкивом трения и противовесом, однодвигательная.

Из оценки динамических усилий в идеально упругих нитях переменных длин следует, что только при подъеме нитей без концевых грузов при неинтегрируемых граничных условиях усилия в них не возрастают. Во всех остальных случаях усилия при подъеме возрастают (обратно пропорционально той или иной степени из длины нити) [4]. Однако на практике при умеренных скоростях подъема это явление не наблюдается ввиду того, что наряду с возрастанием амплитуд динамических усилий вследствие уменьшения длины происходит одновременное уменьшение амплитуд их колебаний.

### 3. Математическая модель динамики шахтной канатной установки

В области  $0 < x < l + v(t)$ ,  $t > 0$ , найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $a$  – скорость звука в стальном канате;  
удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (2)$$

и краевым условиям

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + h(x,t)u \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} + h(x,t)u \right) \Big|_{x=l+v(t)} = \theta(t), \quad t > 0. \quad (3)$$

В данной задаче рассматривается интервал, имеющий при  $t = 0$  длину  $l$ , и при  $t > 0$  правый конец этого интервала (точка соприкосновения каната с барабаном) движется по закону  $x = l + v(t)$ , причем  $v(0) = 0$ .

Решение задачи ищем в стандартном виде

$$u(x,t) = \chi(x - at) + \chi(x + at).$$

Выполняется условие не вырождения среды

$$l + v(t) > 0, \quad t > 0. \quad (4)$$

Так, как нижний конец каната в относительной системе координат находится в состоянии покоя, то

$$u(x,t) = \chi(x + at) \quad (5)$$

Используем модифицированный метод продолжения для области с подвижной границей, продолжим функцию  $\theta(t)$  на всю ось  $t$ :

$$\tilde{\theta}(t) = \begin{cases} \theta(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (6)$$

и подставляя форму решения (5) в продолжение (6) на всю ось  $t$  второе краевое условие (3), с учетом условия (4), получим

$$\chi'(l+v(t)+at) + h(l+v(t),t) \cdot \chi(l+v(t)+at) = \tilde{\theta}(t). \quad (7)$$

Введем преобразование независимой переменной в уравнение (7)

$$g(t) = l + v(t) + at. \quad (8)$$

Если уравнение (8) неразрешимо относительно  $t$ , то рассматриваемая задача не имеет решения. То есть, остается рассмотреть лишь случай разрешимости уравнения (8) относительно  $t$ . Функция  $v(t)$  непрерывно дифференцируема при  $t > 0$ .

Должно выполняться условие

$$|v'| < a, \quad t > 0, \quad (9)$$

где  $a$  – скорость звука в стальном канате.

Обратная к (8) функция  $t_0(g)$  существует тогда и только тогда, когда функция  $v(t)+at$  является строго монотонной. И благодаря условию (9), функция  $t_0(g)$  является строго-монотонно возрастающей и непрерывно дифференцируемой. Таким образом, продолженная на всю ось  $g$  функция  $t_0(g)$  обладает следующими свойствами:

$$t_0(g) : \begin{cases} > 0, & g > l, \\ = 0, & g = l, \\ < 0, & g < l. \end{cases} \quad (10)$$

Учитывая свойства (10), уравнение (7) можно представить в виде

$$\chi'(g) + H(g)\chi(g) = \tilde{\theta}(t_0(g)), \quad (11)$$

тогда общее решение уравнения (1) может быть представлено в форме

$$\chi(g) = \frac{C + \int_l^g \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy}{E(g)}, \quad (12)$$

где  $H(g) = h(l+v(t_0(g)), t_0(g))$ ;  $E(g) = e^{\int H(g)dg}$ ,  $C$  – произвольная константа.

Решение задачи для начального интервала времени:

$$u(x,t) = \frac{1}{E(x+at)} \int_l^{x+at} \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy, \quad (13)$$

так как из первого начального условия следует, что  $C = 0$ .

Учитывая, что  $E'(g) = H(g)E(g)$ , для функции (13) имеем

$$u_x(x,t) + h(x,t)u(x,t) = -H(x+at) \cdot \frac{1}{E(x+at)} \int_l^{x+at} \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy + \tilde{\theta}(t_0(x+at)) +$$

$$+ \frac{h(x,t)}{E(x+at)} \cdot \int_l^{x+at} \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy.$$

Функция (13) удовлетворяет начальным условиям, второму краевому условию (3), а также уравнению (1) при  $t > 0$ ; но первому краевому условию функция (13) удовлетворяет только при  $t < \frac{l}{a}$ . Поэтому, модифицированным методом продолжения решается

дополнительная задача: в области  $0 < x < l + v(t)$ ,  $t > \frac{l}{a}$ , найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\rho(x, \frac{l}{a}) = 0, \quad \rho_t(x, \frac{l}{a}) = 0, \quad 0 < x < l + \rho(\frac{l}{a}) \quad (14)$$

и краевому условию

$$\begin{aligned} \rho_x(0,t) + h(0,t) \cdot \rho(0,t) &= (H(a \cdot t) - h(0,t)) \cdot \frac{1}{E(a \cdot t)} \int_l^{at} \tilde{\theta}(t_0(y))E(y) - \tilde{\theta}(t_0(a \cdot t)) = \\ &= \varphi_0(t), \quad t > \frac{l}{a} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\varphi_0(t) = 0 \quad \text{при } t < \frac{l}{a}.$$

Из начальных условий (14) следует, что

$$\rho(x,t) = -E_1(at-x) \cdot \int_l^{at-x} \varphi_0\left(\frac{y}{a}\right) \frac{dy}{E_1(y)}.$$

Тогда решением основной задачи будет функция

$$\psi(x,t) = u(x,t) + \rho(x,t) = \frac{1}{E(x+at)} \int_l^{at+x} \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy - E_1(at-x) \int_l^{at-x} \varphi_0\left(\frac{y}{a}\right) \frac{dy}{E_1(y)}.$$

Применительно к наматыванию каната на барабан эту задачу можно математически интерпретировать следующим образом. В области:

$0 < x < l + v(t)$ ,  $t > 0$  найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + D \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + B \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + Cu(x,t) = 0, \quad (16)$$

где  $A, B, C, D$  – коэффициенты телеграфного уравнения;

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 0, \quad x > 0 \quad (17)$$

и краевым условиям

$$u(l+v(t),t) = \mu(t); \quad u(0,t) = 0, \quad t > 0. \quad (18)$$

Функция  $v(t)$  описывает изменение длины каната на барабане. Точка свисающей части каната с барабаном имеет координату  $x = l + v(t)$ . Упругое перемещение в точке  $x = 0$   $u(0,t) = 0$ .

Введем преобразование переменной  $t$ :

$$\tau = t + \frac{v(t) + l}{a}, \quad (19)$$

и учтем, что  $\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{v'(t)}{a} > 0$ , тогда  $\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{v'(t)}{a} > 0$ .

Продолжим функцию  $v(t)$  на всю ось  $t$ , потребовав выполнения на всей оси  $t$  условия (19) и существования производной этого продолжения на всей оси  $t$ . Обозначим это продолжение через  $\tilde{v}(t)$ . Тогда на всей оси  $t$  будет определена функция

$$K(t) = \begin{cases} v(t), & t > 0; \\ \tilde{v}(t), & t < 0. \end{cases}$$

Пусть  $T(t)$  – продолженная на всю ось  $t$  функция:

$$T(t) = t + \frac{K(t) + l}{a}.$$

Функция  $T(t)$  является строго монотонной при всех  $t$  и для нее существует обратная функция  $Z(T)$ :

$$Z(t) = \begin{cases} z(\tau) > 0, & T > \frac{l}{a}; \\ 0, & T = \frac{l}{a}; \\ < 0, & T < \frac{l}{a}. \end{cases}$$

Так как в краевом условии (18) функция  $\mu(t)$  определена лишь на полуоси, необходимо построить ее продолжение на всю ось  $t$ :

$$M(t) = \begin{cases} \mu(t), & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Учитывая, что волны в среде возбуждаются на правом конце отрезка и распространяются в среду в направлении отрицательных  $x$ , решение задачи отыскивается в виде функции:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( 2M_{2n}\left(t + \frac{x}{a}\right) e^{-\frac{(Da+B)x}{2}} + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^a \left( \frac{B}{2} J_0(\sigma) - c_1 \frac{x}{\sigma} J_1(\sigma) \right) e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_{2n}(\eta) d\eta \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 2e^{\frac{(Da-B)x}{2}} \left( -M_{2n+1}\left(t - \frac{x}{a}\right) + M_{2n}\left(t - \frac{x}{a}\right) \right) + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^a \left( \frac{B}{2} J_0(\sigma) - c_1 \frac{x}{\sigma} J_1(\sigma) \right) e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} (M_{2n+1}(\eta) - M_{2n}(\eta)) d\eta \right] \quad (20)$$

где  $J_0(\sigma), J_1(\sigma)$  – функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно;

$$\sigma = \sqrt{c_1(x^2 - a^2(t-\eta)^2)}; \quad c_1 = C + \frac{D^2 a^2}{4} - \frac{B^2}{4}.$$

Принимая во внимание, что первое краевое условие (18) продолжается на всю ось  $t$ :  
 $u(l+v(t), t) = M(t)$ .

#### 4. Практическая реализация результатов моделирования

Специфика работы, условия, в которых осуществляются транспортные операции по перемещению грузов, людей, механизмов, запасного и ремонтного оборудования, наличие большого числа ШПМ, работающих в разных климатических зонах и осуществляющих подъем (опускание) как с глубины нескольких сот метров, так и с глубин около двух километров способствовали выделению электропривода ШПМ в отдельное направление, которое до настоящего времени прошло несколько этапов развития.

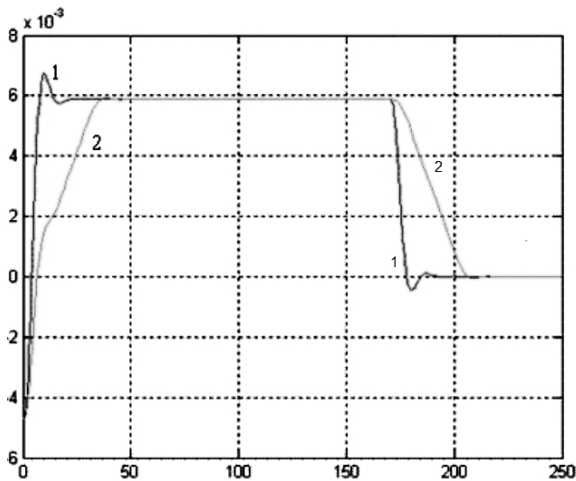


Рис. 2. – Переходной процесс

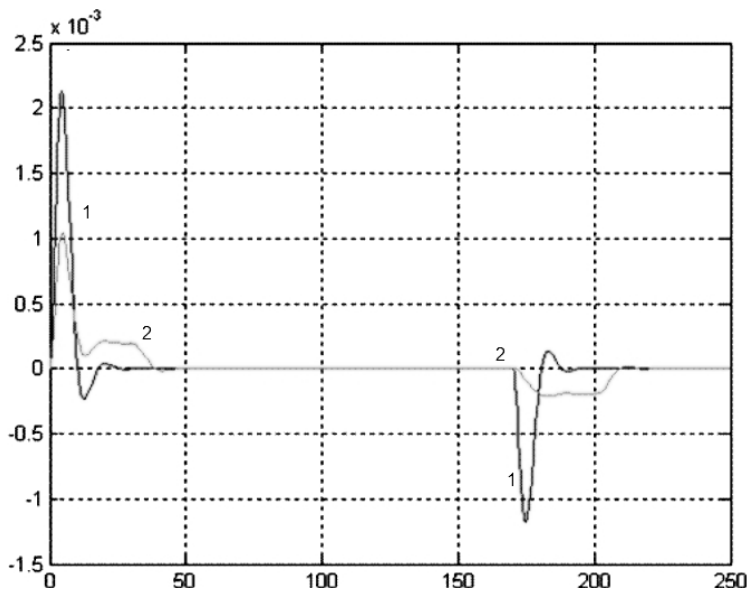


Рис. 3 – Рывок барабана при нагрузке на головной канат

канатов (упругого стержня) во времени. Установлены закономерности влияния характера отраженных волн от подвижного и неподвижного концов упругой нити, необходимые для оптимальной работы подъемной системы.

Учитывая полученное решение для функции (20), найдем для каждого момента времени работы подъемной канатной установки соответствующие показатели переходных процессов без нагрузки, в точке касания каната с барабаном, и зафиксированной точке свисающей части каната (рис. 2).

В итоге, благодаря применению экспериментальных промышленных данных и вычислению полей перемещений и напряжений, мы можем спрогнозировать поведения рывка при пуске нагруженной системы на главном канате (рис. 3).

#### Выводы

Проведены исследования динамической задачи, связанной с продольными колебаниями стальных канатов шахтных стальных систем. Сформулирована задача о динамике подъемной установки с точки зрения напряжений в сечениях главных стальных

### Список использованных источников:

1. Селиванов В. Механика разрушения деформируемого тела / В. Селиванов. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006.
2. Бежок В. Шахтный подъем / В. Бежок, В. Дворников. – Донецк: ООО “Юго-Восток”, 2007.
3. Лексина С. В. Система волновых уравнений с граничным управлением на двух концах / С. В. Бежок, А. А. Андреев // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2008. – № 8/1(67). – С. 21–34.
4. Смоланов С. Н. Аварийно-спасательная передвижная установка / С. Н. Смоланов, О. А. Колесов // Уголь Украины. – 2008. – № 1. – С. 43–45.
5. Ильин С. Р. Влияние параметров скорости подъема и эксцентриситета груза на динамику системы “сосуд-армировка” шахтных стволов / С. Р. Ильин // Сб. науч. тр. ИГТМ НАН Украины. – 2012. – Вып. 98. – С. 322–348.

*Зеленская Т.С., Данилина Г.В.* «Переходные процессы в канатах с переменной верхней границей».

Построена математическая модель продольных колебаний, возникающих в главных канатах грузоподъемных механизмов, отображающая поле динамических перемещений и напряжений в произвольном сечении каната, который наматывается на барабан. Рассмотрена постановка краевой задачи для стального каната постоянного сечения.

**Ключевые слова:** волновое и телеграфное уравнения, область с подвижной границей.

*Зеленська Т.С., Даниліна Г.В.* «Перехідні процеси в канатах зі змінною верхньою границею».

Побудовано математичну модель поздовжніх коливань, які виникають в головних канатах вантажопідйомних механізмів, що відображають поле динамічних переміщень та напружень в довільному перерізі каната, котрий намотується на барабан. Розглянуто постановку крайової задачі для стального каната постійного перерізу.

**Ключові слова:** хвильове та телеграфне рівняння, область з рухомою границею.

*Zelenskaya T.S., Danilina G. V.* “Transient processes in the ropes with a variable upper boundary”.

The mathematical model of longitudinal vibrations arising in the main ropes for load-lifting mechanisms, showing the dynamic field of displacements and stresses in the random section of the rope, which is wound on a drum. A formulation of the boundary value problem for steel rope with a constant cross section.

**Key words:** wave and telegraph equations, area with moving boundary.

Стаття надійшла до редакції 10 жовтня 2013 р.